

УДК 538.945

Л. А. Суворова, А. Р. Бувев

РАСЧЕТ ИНДУКТИВНОСТИ ОБРАЗЦА В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ СОСТОЯНИИ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ПЕРЕХОД В КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Аннотация. Показано, что в приближении тонкого сверхпроводящего кольца его внутренняя (связанная с собственным объемом) индуктивность существенна по отношению к индуктивности, связанной с отверстием кольца. Учитывались три функциональные зависимости, описывающие затухание магнитного поля по мере его проникновения в объем сверхпроводящего кольца.

Ключевые слова: керамические высокотемпературные сверхпроводники, тонкое кольцо, критическое состояние, собственное магнитное поле, джозефсоновская глубина проникновения, самоиндукция сверхпроводящего кольца, поток магнитной индукции.

Abstract. The authors consider the fact that the internal inductance (volume-dependent) of a thin superconducting ring in approximation is significant compared to ring hole-dependent inductance. The researchers take into account three functional dependencies, describing magnetic field damping as it penetrates the volume of the superconducting ring.

Key words: ceramic HTSC, thin ring, critical state, self-magnetic field, Josephson penetration depth, superconducting ring inductance, magnetic flux.

Введение

Данная работа дополняет статью [1]. С помощью аппарата символьной математики Wolfram Mathematica 8 (WM8) рассчитывается возможное влияние потока собственного магнитного поля (внутренней индуктивности) через объем образца (сверхпроводящего кольца) на ход кривой (рис. 1), измеряемой в эксперименте работы [1]. Одним из следствий [1] является модель критического состояния керамического высокотемпературного сверхпроводящего (ВТСП) кольца, находящегося под непосредственным воздействием только собственного магнитного поля.

Одним из экспериментальных фактов, лежащих в основе модели критического состояния, является строгая линейность участка кривой 0–1 (рис. 1).

В условиях эксперимента [1] участок 0–1 может быть линейным только при постоянстве индуктивности (коэффициента самоиндукции) сверхпроводящего кольца на всем протяжении этого участка. В свою очередь это возможно только при том условии, что в момент его включения магнитное поле проникает в сверхпроводящее кольцо на определенную глубину и эта глубина не меняется на протяжении участка 0–1 (рис. 1).

Главным основным обоснованием вышесказанного является тот факт, что в условиях эксперимента [1] сверхпроводящий ток в кольце наводится индуктивно от вставленного в кольцо соленоида с током.

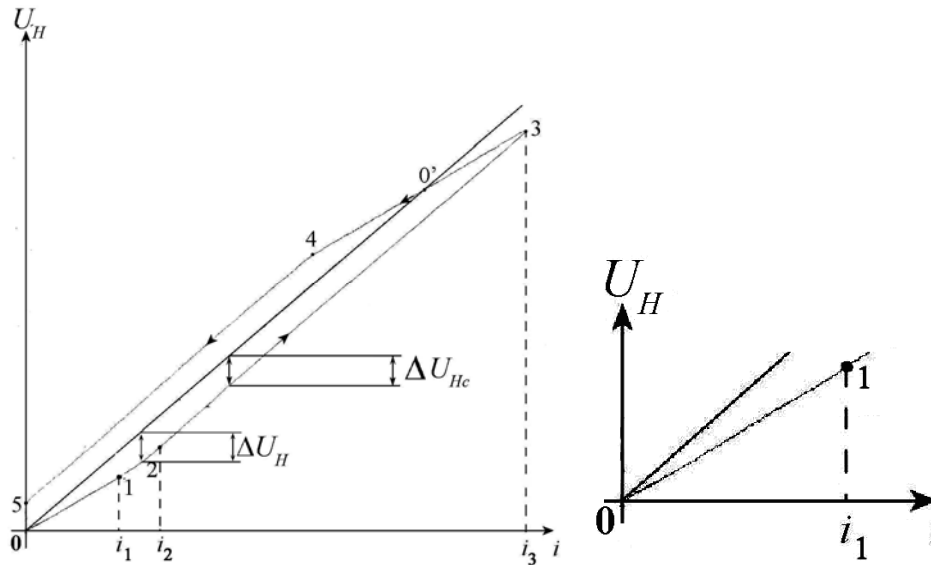


Рис. 1. Зависимость напряжения U_H на датчике Холла от тока соленоида i :

1 (i_1) – точка (соответствующий ток соленоида), в которой заканчивается первый линейный участок кривой 0–1; 2 (i_2) – точка (соответствующий ток соленоида), с которой начинается второй линейный участок 2–3; прямая 0–0' – зависимость $U_0(i)$ в отсутствие ВТСП кольца, ΔU_{He} – расстояние между прямыми 2–3 и $U_0(i)$ (см. [1])

Цель данной работы – показать, что даже в случае тонкого кольца значения внутренней индуктивности существенны по отношению к индуктивности, связанной с отверстием кольца. Расчет $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{L_2}{L_1}$ для различных зависимостей затухания магнитного поля в объеме кольца осуществлен аналитически с помощью WM8.

В условиях рассматриваемого эксперимента [1] и вследствие двухсвязности образца сверхпроводящий ток в нем наводится в результате эффекта самоиндукции. Основную роль при этом играет индуктивность сверхпроводящего кольца.

1. Численная модель кругового контура с током

1.1. Магнитное поле кругового контура с током

Z-составляющая магнитного поля, создаваемого тонким кольцом с током в точке (R, H, x) , найденного с помощью методов магнитостатики из закона Био – Савара – Лапласа (см., например, [2]), определяется выражением

$$B_{Z0}(R, H, x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 + Rx \sin(y)}{(R^2 + x^2 + 2Rx \sin(y) + H^2)^{3/2}} dy, \quad (1)$$

где H, R – координаты точки: H – расстояние от точки до плоскости кольца; R – расстояние от точки до оси кольца; x – радиус кольца. Размерный множитель перед интегралом принят равным 1, интегрирование осуществляется по угловой переменной y .

Решение интеграла (1) представляется соотношением

$$B_{Z0}(R, H, x) = -\frac{1}{(R^2 - 2Rx + x^2 + H^2)\sqrt{R^2 + 2Rx + x^2 + H^2}} \times \\ \times \left\{ (R^2 - x^2 + H^2) \cdot \text{EllipticE}\left(\frac{4Rx}{R^2 + 2Rx + x^2 + H^2}\right) - \right. \\ \left. - (R^2 - 2Rx + x^2 + H^2) \cdot \text{EllipticK}\left(\frac{4Rx}{R^2 + 2Rx + x^2 + H^2}\right) \right\}, \quad (2)$$

где EllipticK , EllipticE – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Зависимости $B_{Z0}(R, H, x)$ изображены на рис. 2 для различных значений H при $x = 3$.

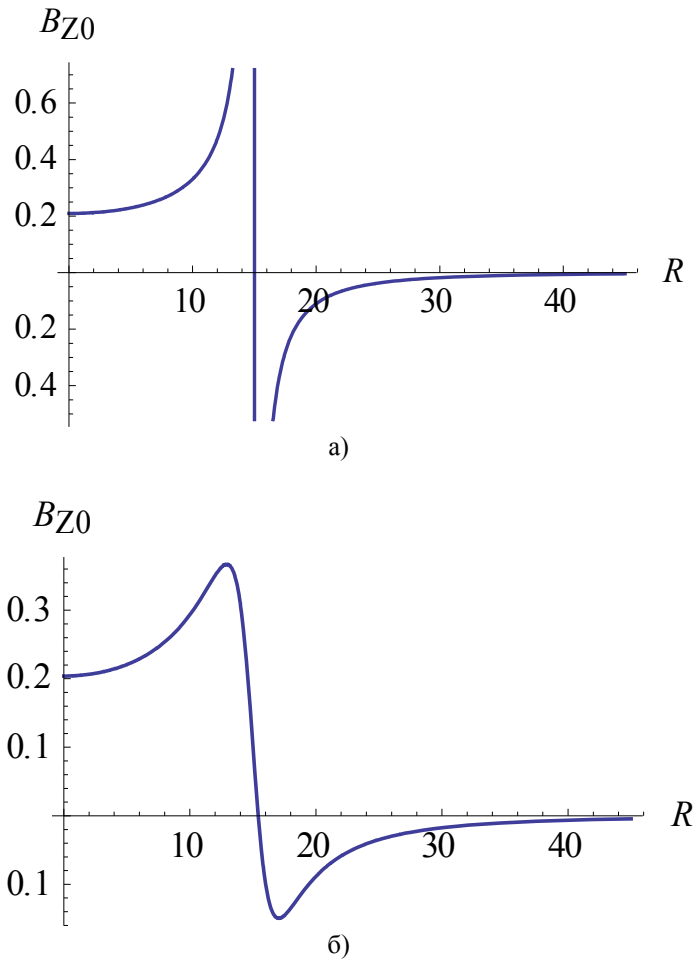


Рис. 2. B_{Z0} -компонента собственного магнитного поля тонкого кольца
 $B_Z(R, H, x)$: а – $H = 0$; б – $H = 2$; в – $H = 3$ (радиус кольца $x = 3$)

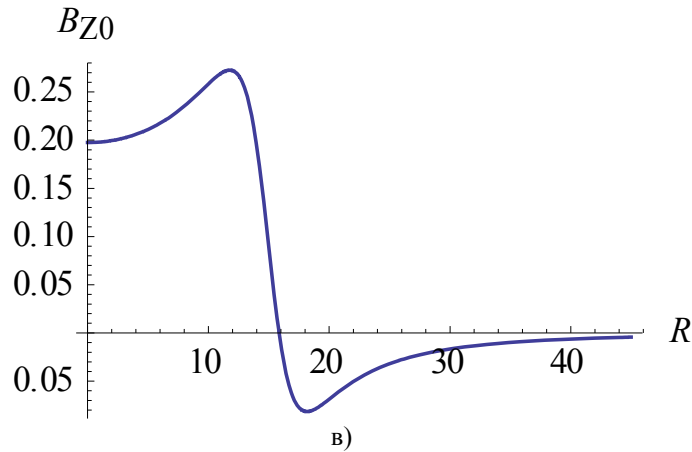


Рис. 2. Окончание

1.2. Затухание магнитного поля внутри кольца

В данной работе рассматривается настолько тонкое ВТСП кольцо, что для него несущественным является его профиль (форма поперечного сечения), и поэтому для проведения расчетов можно принять, что кольцо имеет круглую форму сечения. Реальные же, используемые в экспериментах ВТСП кольца производятся, как правило, методом осевого прессования и поэтому имеют сечения прямоугольной формы.

Для вычисления индуктивности в настоящей работе круглое кольцо можно заменить идеально тонким кольцом, для которого магнитное поле уже известно (см., например, [2], формулы (1), (2)). Проведенный расчет показывает, что зависимость, описывающая затухание магнитного поля в объеме кольца, сильно влияет на его индуктивность и может повлиять на ход кривой (рис. 1). Расчет индуктивностей производится для трех зависимостей, описывающих затухание магнитного поля внутри кольца:

1. Линейная зависимость:

$$B_{Z1} = B_{Z0} \cdot g_1(R), \quad g_1(R) = \frac{(x-R)}{d}. \quad (3)$$

2. Нелинейная зависимость:

$$B_{Z2} = B_{Z0} \cdot g_2(R), \quad g_2(R) = \frac{(x-R)^k}{d^k} \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (4)$$

3. Экспоненциальная зависимость:

$$B_{Z3} = B_{Z0} \cdot g_3(R), \quad g_3(R) = \frac{\exp(-k(R+d-x)) - \exp(-kd)}{1 - \exp(-kd)}. \quad (5)$$

В формулах (3)–(5) B_{Z0} – величина магнитного поля на внутренней поверхности кольца; g_1 , g_2 , g_3 – весовые функции, описывающие затухания; R – расстояние от оси кольца до точки; x – радиус центральной линии кольца; d – радиус поперечного сечения кольца; k – параметр затухания. Переменная R меняется в диапазоне от $x-d$ до x (рис. 3).

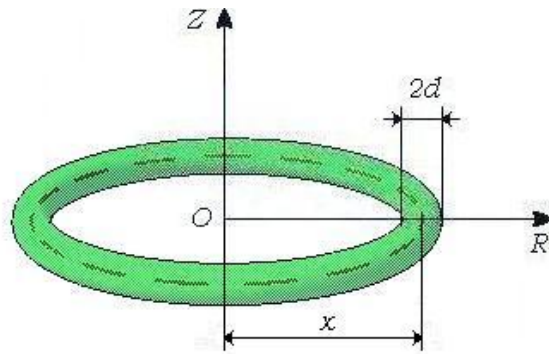


Рис. 3. Кольцо круглого сечения

На рис. 4 показаны зависимости весовых функций $g_1(R)$, $g_2(R)$, $g_3(R)$ для двух случаев: $k = 2$, $k = 10$ при $x = 3$, $d = 2$.

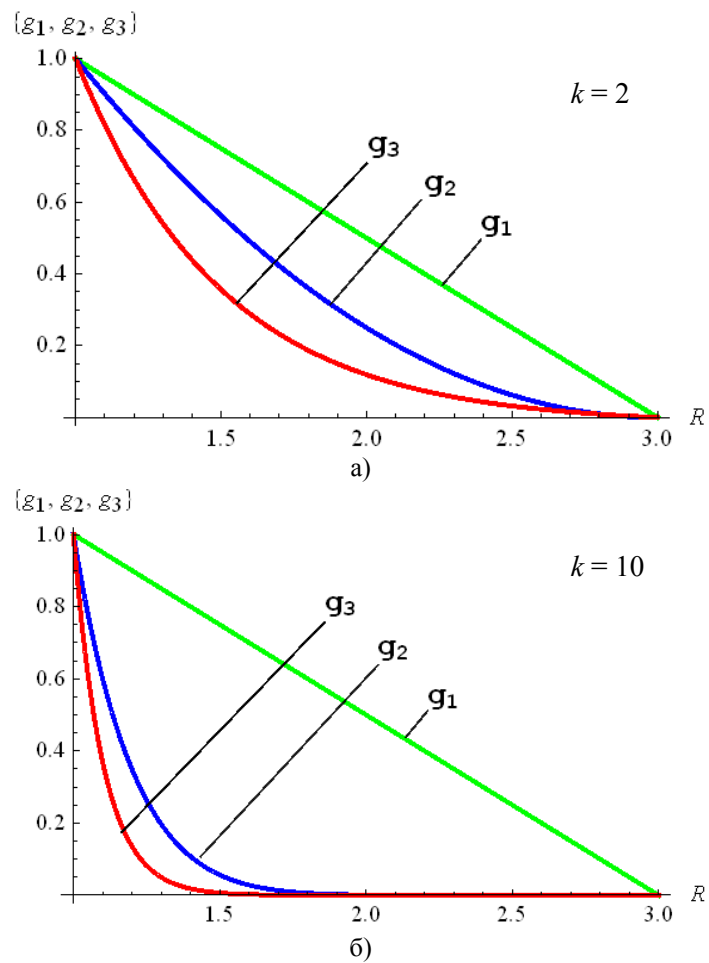


Рис. 4. Весовые функции для различных вариантов затухания: $g_1(R)$ – линейное, $g_2(R)$ – нелинейное, $g_3(R)$ – экспоненциальное; а – $k = 2$; б – $k = 10$. Линейной зависимости соответствует $k = 1$ (кривая $g_1(R)$). Радиус средней линии кольца $x = 3$, полуширина $d = 2$

2. Расчет индуктивностей сверхпроводящего кольца

Для расчета индуктивностей с помощью формул (1), (2) в аналитическом виде предполагается, что используемые кольца удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) кольцо имеет круглое сечение;
- 2) ток по сечению кольца распределен равномерно;
- 3) кольцо является тонким, т.е. $\frac{2d}{x} \leq 0,1$.

В данной работе все расчеты производятся с помощью символьной математики WM8. Достоинством WM8 является то, что в нем используются символьные алгоритмы, а не численные, такие как Maple, MathCAD и MatLab. При этом с результатом расчета можно осуществлять дальнейшие математические операции (дифференцирование, интегрирование и т.д.) аналитических зависимостей.

Полная индуктивность (и, соответственно, магнитный поток) сверхпроводящего кольца равна

$$L = L_1 + L_2,$$

где L_1 – индуктивность, связанная с отверстием кольца; L_2 – его собственная индуктивность.

Показано, что зависимость $\Phi_1(a)$ для предполагаемого сверхпроводящего кольца, где a – относительный поперечный размер кольца, $a = \frac{d}{x}$ ($d \ll x$), задается соотношением

$$\Phi_1(a) = \int_0^{x-d} B_{Z0}(R, 0, a) 2\pi R dR, \quad (6)$$

где $B_{Z0}(R, 0, a)$ – магнитное поле в отверстии кольца, определяется с помощью формулы (2) при $H = 0$.

Зависимость $\Phi_1(a)$ представлена на рис. 5 для $x = 15$.

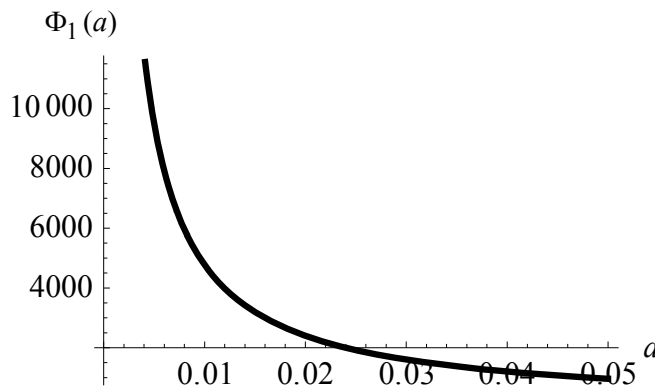


Рис. 5. Зависимость потока магнитной индукции, пронизывающий отверстие кольца

$\Phi_1(a)$; a – относительный поперечный размер кольца, $a = \frac{d}{x}$ (при $x = 15$)

Вследствие (3)–(5) магнитное поле в объеме кольца определяется соотношением

$$B_Z(R, 0, a) = B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot g(R),$$

где $B_{Z0}(R = x - d, 0, a)$ – значение магнитного поля в плоскости кольца ($H = 0$) на внутренней поверхности кольца ($R = x - d$); $g(R)$ – весовая функция, определяющая магнитное поле внутри кольца (см. формулы (3)–(5));

$$B_{Z0}(R = x - d, 0, a) = \frac{1}{a(2 - a) \cdot x} \times \left\{ (2 - a) \cdot \text{EllipticE} \left(\frac{(4 - 4a)}{(2 - a)^2} \right) + a \cdot \text{EllipticK} \left(\frac{(4 - 4a)}{(2 - a)^2} \right) \right\}. \quad (7)$$

Расчет потока через объем кольца $\Phi_2(a)$ для трех зависимостей затухания с помощью весовых функций (3)–(5) представляется формулой (8) и на рис. 6–8.

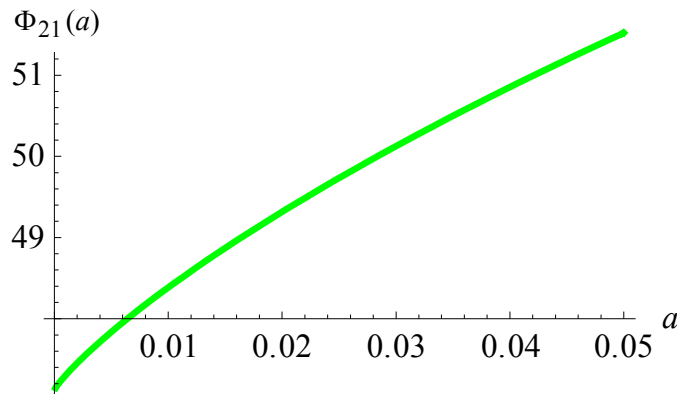


Рис. 6. График зависимости потока магнитной индукции через отверстие кольца $\Phi_{21}(a)$ при линейном распределении (3), $a = \frac{d}{x}$ – относительный поперечный размер кольца (при $x = 15$)

1. Для линейной зависимости (3):

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot g_1(R) 2\pi R dR = \\ &= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot \frac{(x - R)}{d} 2\pi R dR. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Для нелинейной зависимости (4):

$$\Phi_{22} = \int_{x-d}^x B_{Z0}(R = x - d, 0, a) \cdot g_2(R) 2\pi R dR =$$

$$= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R=x-d, 0, a) \cdot \frac{(x-R)^k}{d^k} 2\pi R dR. \quad (9)$$

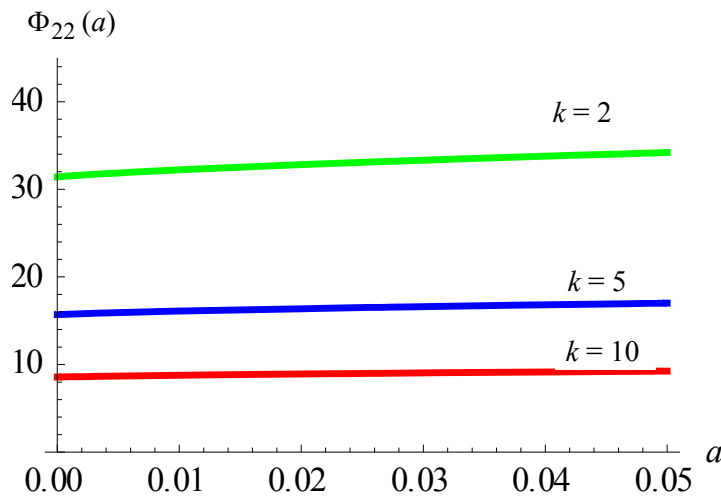


Рис. 7. Зависимость $\Phi_{22}(a)$ потока магнитной индукции через отверстие кольца при нелинейном распределении (4), $a = \frac{d}{x}$ – относительный поперечный размер кольца ($x = 15$, $k = 2, 5, 10$)

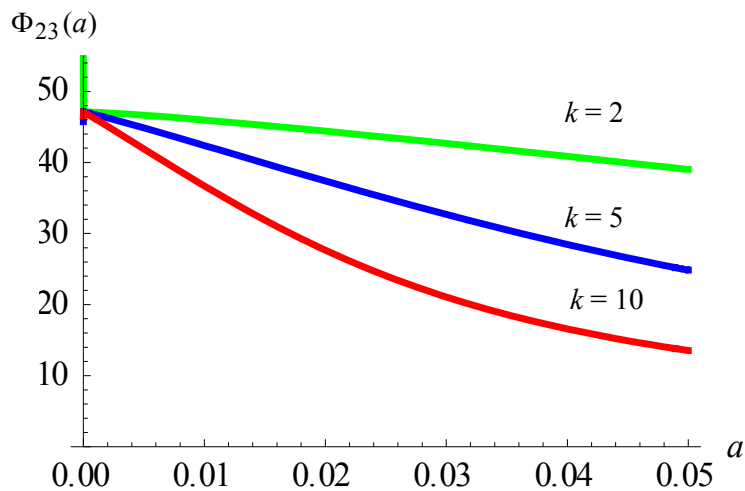


Рис. 8. Зависимость $\Phi_{23}(a)$ потока магнитной индукции через отверстие кольца при экспоненциальном распределении (5), где $a = \frac{d}{x}$ – относительный поперечный размер кольца ($x = 15$, $k = 2, 5, 10$)

3. Поток при экспоненциальном затухании (5):

$$\Phi_{23} = \int_{x-d}^x B_{Z0}(R=x-d, 0, a) \cdot g_3(R) 2\pi R dR =$$

$$= \int_{x-d}^x B_{Z0}(R=x-d, 0, a) \cdot \frac{\exp(-k(R+d-x)) - \exp(-kd)}{1 - \exp(-kd)} 2\pi R dR. \quad (10)$$

Поток $\Phi_{22}(a)$ (рис. 7) представляет особый интерес. Для него зависимость от относительного поперечного размера кольца a при нелинейном затухании поля с различными k практически отсутствует. В то же время при экспоненциальном и линейном затухании $\Phi_{23}(a)$ (рис. 8) и $\Phi_{21}(a)$ (рис. 6) эта зависимость существует и имеет обратный характер. С увеличением a при линейном распределении поток $\Phi_{21}(a)$ (рис. 6) увеличивается, а при экспоненциальном распределении (рис. 8) – уменьшается.

3. Оценка относительной собственной индуктивности сверхпроводящего кольца

Вычисление относительных собственных индуктивностей сверхпроводящего кольца осуществляется посредством вычисления отношений потоков $\frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}$, $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}$, где Φ_{21} , Φ_{22} , Φ_{23} – потоки магнитного поля через собственный объем кольца, Φ_1 – поток через отверстие кольца.

Эти отношения для коэффициентов затухания $k = 2$ и $k = 10$ представлены на рис. 9–12.

Из рис. 9 следует, что при линейном $\frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}$ и нелинейном $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}$ распределениях отношения потоков имеют линейную зависимость от поперечного размера a , в отличие от экспоненциального распределения.

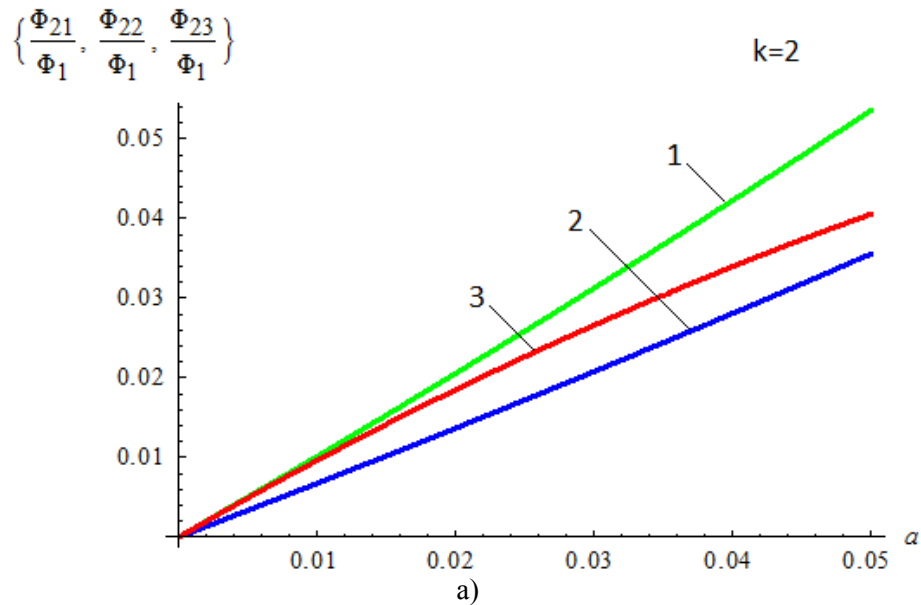


Рис. 9. Кривые отношений потоков:

$$1 - \frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}, 2 - \frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}, 3 - \frac{\Phi_{23}}{\Phi_1} \quad (x = 15)$$

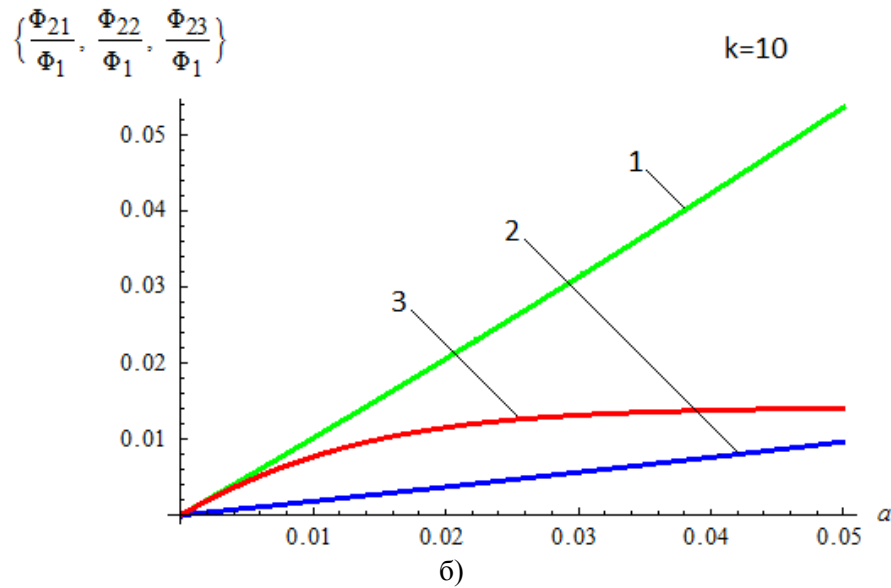
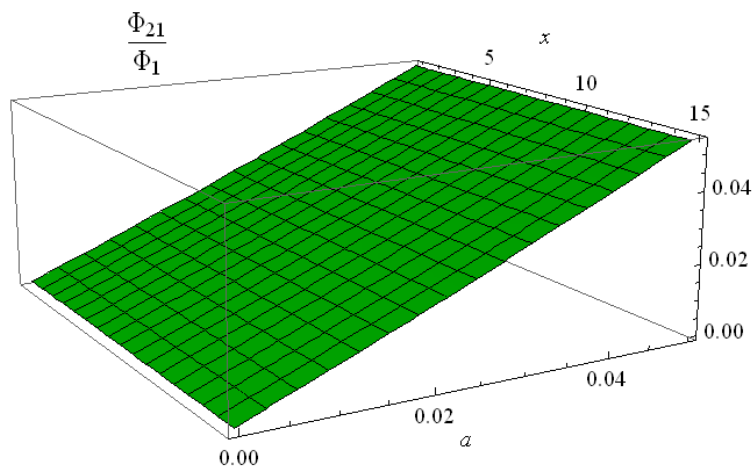


Рис. 9. Окончание

Рис. 10. Зависимость $\frac{\Phi_{21}}{\Phi_1}(x, a)$

Также с увеличением поперечного размера кольца заметно возрастает отношение индуктивностей, из чего следует, что для колец реальных размеров это отношение окажется больше. Исходя из рис. 9, зная отношение потоков магнитной индукции $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ (индуктивностей), можно сказать о характере проникновения магнитного поля в объем сверхпроводящего кольца. Для большей наглядности зависимости, отображенные на рис. 8 и 9, показаны в 3D-представлении.

В результате расчетов при экспоненциальном распределении результат получился неожиданный. Оказалось, что отношение $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}(x, a)$ (рис. 12)

уменьшается с ростом радиуса x , т.е. оно зависит от размера кольца, в отличие от остальных распределений (рис. 10 и 11). Также значения при нелинейном $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}(x, a)$ и экспоненциальном $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}(x, a)$ распределениях убывают с ростом k .

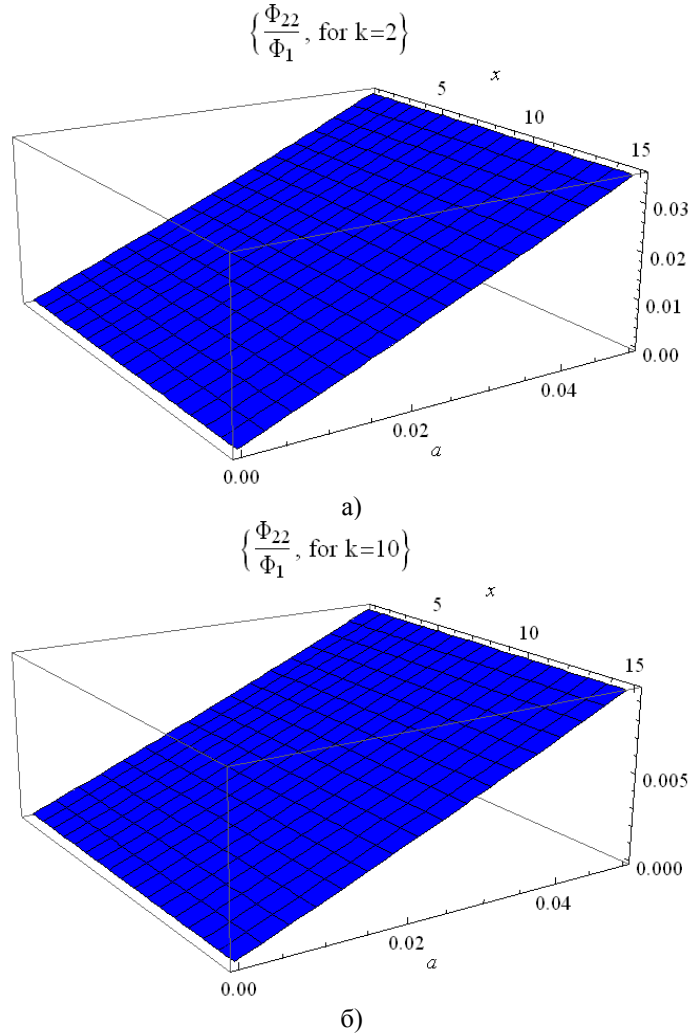


Рис. 11. Зависимость $\frac{\Phi_{22}}{\Phi_1}(x, a)$

Вычисления индуктивностей (рис. 9–12) показывают, что изменения относительных индуктивностей в зависимости от условий по порядку величины могут достигать 10 %, т.е. заметно влиять на ход кривой $U_H(i)$ – зависимость напряжения от тока соленоида (рис. 1) [1].

Выводы

1. Подтвердились результаты работы [1]. Показано, что возможное изменение индуктивности сверхпроводящего кольца достаточно для того, что-

бы повлиять на линейность участка 0–1 экспериментальной кривой (рис. 1) (см. [1]).

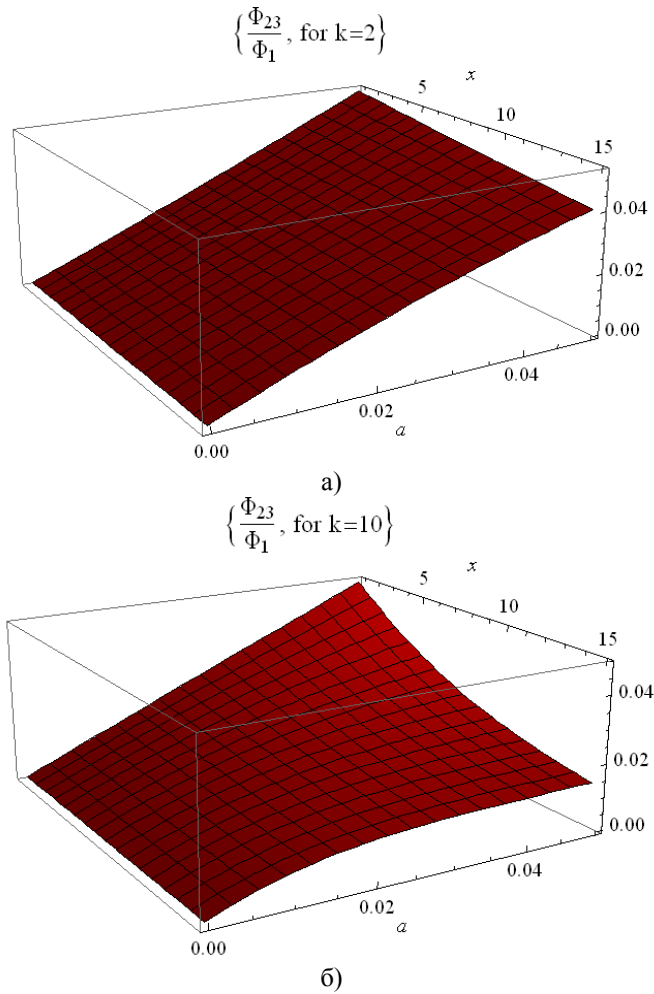


Рис. 12. Зависимость $\frac{\Phi_{23}}{\Phi_1}(x, a)$

2. Относительная собственная индуктивность сверхпроводящего кольца существенно зависит от функции затухания магнитного поля в собственном объеме кольца. Из результатов эксперимента можно сделать выводы относительно функции затухания магнитного поля в образце. В статье [4] рассматриваются функции затухания внешнего магнитного поля. Отличительной особенностью данной работы является то, что сверхпроводящее кольцо взаимодействует только с собственным магнитным полем, и поэтому функции распределения относятся именно к данной особенности взаимодействия.

3. В данной работе рассматривается идеализированное тонкое кольцо с относительным диаметром $\frac{2d}{x} \leq 0,1$. Следовательно, чем толще кольцо (т.е. чем больше a), тем отношение индуктивностей значительно растет (до 6 % при $a = 5$ %). Для реальных колец, используемых в эксперименте

с относительным диаметром $\frac{2d}{x} \approx 0,1 - 0,5$, относительная собственная индуктивность увеличивается в несколько раз. При этом собственное магнитное поле кольца, а следовательно, и собственная индуктивность будут сильно зависеть от профиля кольца и распределения сверхпроводящего тока в нем. Результаты данной работы к подобным кольцам не применимы. Для таких колец необходимо вычисление тройных интегралов по объему кольца с учетом весовой функции с током. В данной работе интегрирование идет только по угловой переменной (см. формулу (1)). Расчеты реальных колец, очевидно, по своей сложности значительно превосходят расчеты данной работы. Поэтому представляется целесообразным и полезным произвести вычисления для реальных колец с применением WM8 и получением результатов в символьном, аналитическом виде.

Список литературы

1. **Суворова, Л. А.** Модель процесса перехода поликристаллического высокотемпературного сверхпроводника в критическое состояние / Л. А. Суворова, А. Р. Був // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 102–114.
2. **Матвеев, А. Н.** Электродинамика / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1980. – 383 с.
3. Пат. 2244317 Российская Федерация, МПК7 G01R031/00. Способ бесконтактного измерения тока ВТСП и устройство для его реализации / Був А. Р. ; заявитель и патентообладатель Марийский гос. ун-т. – № 200213236/28 ; заявл. 02.12.2002; опубл. 2005, БИ № 1.
4. **Белодедов, М. В.** О проникновении магнитного поля в гранулированный сверхпроводник / М. В. Белодедов, С. В. Черных // Журнал технической физики. – 2003. – Т. 73, № 2. – С. 75–80.

Суворова Людмила Алексеевна
аспирант, Марийский государственный
университет (г. Йошкар-Ола)

E-mail: suv87L@mail.ru

Suvorova Lyudmila Alekseevna
Postgraduate student,
Mari State University (Yoshkar-Ola)

Був Андрей Романович
доктор технических наук, профессор,
кафедра теоретической и прикладной
физики, Марийский государственный
университет (г. Йошкар-Ола)

E-mail: suv87L@mail.ru

Buev Andrey Romanovich
Doctor of engineering sciences, professor,
sub-department of theoretical and applied
physics, Mari State University
(Yoshkar-Ola)

УДК 538.945

Суворова, Л. А.

Расчет индуктивности образца в сверхпроводящем состоянии и ее влияние на переход в критическое состояние / Л. А. Суворова, А. Р. Був // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 106–118.